3) $pq+xp+yq=0 \quad \dfrac{dx}{q+x}=\dfrac{dy}{p+y}=\dfrac{dz}{pq+px+qp+qy}=\dfrac{-dp}{p}=\dfrac{-dq}{q}$

$\dfrac{dp}{p}=\dfrac{dq}{q} \Rightarrow \quad p=aq$ olur. Bunu $pq+xp+yq=0$ denk. de yerine yazarsak, $aq^2+xaq+yq=0 \Rightarrow aq^2+(ax+y)q=0$

$q\neq 0 \quad aq+ax+y=0 \Rightarrow \quad q=\dfrac{ax+y}{a}$ olur. O halde

$p=aq \Rightarrow \quad p=ax+y$ olur. $dz=pdx+qdy$ denkleminde yerine yazılırsa $dz=(ax+y)\,dx+\left(\dfrac{ax+y}{a}\right)dy$

$dz=\dfrac{1}{a}\left[a(ax+y)dx+(ax+y)dy\right] \Rightarrow \int dz=\dfrac{1}{a}\int(ax+y)(adx+dy)$

$z=\dfrac{1}{a}\dfrac{(ax+y)^2}{2}+b \Rightarrow z=\dfrac{(ax+b)^2}{2a}+b$ olur.

Veya $z_x=ax+y \Rightarrow z=a\dfrac{x^2}{2}+yx+h(y)$ olur. Bunun y'ye göre türevini alırsak $z_y=x+h'(y)$ olur. Bu ifade $q=z_y=\dfrac{ax+y}{a}$ ifadesine eşit olmalıdır. $\cancel{x}+h'(y)=\cancel{x}+\dfrac{y}{a}$

$h'(y)=\dfrac{y}{a} \Rightarrow h(y)=\dfrac{y^2}{2a}+b$ olur. O halde

$z=\dfrac{a}{2}x^2+yx+\dfrac{y^2}{2a}+b$ olur. $z=\dfrac{a^2x^2+2axy+y^2}{2a}+b$

$z=\dfrac{(ax+y)^2}{2a}+b$

5) $z=xp+yq-\sqrt{p^2+q}$ Clairaut kısıdak $p=a \quad q=b$

$z=ax+by-\sqrt{a^2+b}$ genel çözüm bulunur. Zarfı bulalım

$x-\dfrac{2a}{2\sqrt{a^2+b}}=0$

$y-\dfrac{1}{2\sqrt{a^2+b}}=0 \Rightarrow y=\dfrac{1}{2\sqrt{a^2+b}} \Rightarrow \boxed{\sqrt{a^2+b}=\dfrac{1}{2y}}$ olur

$x=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b}} \Rightarrow \boxed{x\cdot 2y=a}$ olur Bu değer $\sqrt{a^2+b}=\dfrac{1}{2y}$ de yerine yazılırsa $\sqrt{4x^2y^2+b}=\dfrac{1}{2y} \Rightarrow 4x^2y^2+b=\dfrac{1}{4y^2}$

$\boxed{b=\dfrac{1}{4y^2}-4x^2y^2}$ O halde zarf $z=2xy\,x+\left(\dfrac{1}{4y^2}-4x^2y^2\right)y-\dfrac{1}{2y}$

$z=2x^2y-\dfrac{1}{4y}-4x^2y^3$ olur.

6) $y = f(x) + g(z)$

x-e göre türev $\quad 0 = f' + g' z_x \quad\quad 0 = f'' + g'' z_x^2 + g' z_{xx}$

y-e " " $\quad 1 = g' z_y$

$$\boxed{\begin{aligned} 0 &= g'' z_y^2 + g' z_{yy} \\ 0 &= g'' z_x z_y + g' z_{xy} \end{aligned}} \quad (*)$$

Homojen denklem sisteminin g'', g' bilinmeyenlerine göre sonsuz çözümü old.dan katsayılar matrisinin det $= 0$ dır.

$$\begin{vmatrix} z_y^2 & z_{yy} \\ z_x z_y & z_{xy} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{z_y^2 z_{xy} - z_x z_y z_{yy} = 0} \text{ olur}$$

Veya $\quad 1 = g' z_y \Rightarrow \boxed{g' = \frac{1}{z_y}}$ bu değer

$0 = g'' z_y^2 + g' z_{yy}$ da yerine yazılırsa

$$0 = g'' z_y^2 + \frac{z_{yy}}{z_y} \Rightarrow g'' z_y^2 = -\frac{z_{yy}}{z_y} \Rightarrow \boxed{g'' = -\frac{z_{yy}}{z_y^3}} \text{ olur.}$$

Bu değerler $g'' z_x z_y + g' z_{xy} = 0$ da yerine yazılırsa

$$-\frac{z_{yy}}{z_y^3} \cdot z_x z_y + \frac{1}{z_y} \cdot z_{xy} = 0 \Rightarrow z_y^2 \text{ ile çarpılırsa}$$

$$\boxed{-z_{yy} \cdot z_x + z_y z_{xy} = 0} \text{ olur}$$

Kısmi Dif. Denk. I. Final . 31.12.2019

1) $x = x^2y + z^2\sin x - \tan y + 1$ yüzeyinin üzerindeki $Q_0(0, y_0, 1)$ noktasından geçen teğet düzlemi varsa bulunuz.

2) $pq + xp + yq = 0$, $x^2p^2 - y^2q^2 = 0$ denklemlerinin bağdaşabilir olup-olmadıklarını gösteriniz.

3) $pq + xp + yq = 0$ denkleminin tam çözümünü bulunuz.

4) $y z_x = x z_y + x + y$ denkleminin $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, \sin t - \cos t)$ eğrisinden geçen çözümü varsa bulunuz.

5) $\sqrt{p^2+q^2} = xp + yq - z$ denkleminin tam çözümünü ve varsa zarf yüzeyini bulunuz.

6) $y = f(x) + g(z)$ ifadesini genel çözüm kabul eden kısmi dif. denk. bulunuz. f ve g keyfi fonksiyonlardır.

Not: Sadece dört soru seçerek cevaplandırınız.

Başarılar... N.A

*) Bölümde şu ana kadar görmüş olduğunuz matematik derslerinizin hayata bakışınızda katkısının olup-olmadığını açıklayınız.

ÇÖZÜMLERİ

1) $Q_0(0, y_0, 1)$ yüzeyin üzerinde old. dan $x=0, y=y_0, z=1$ yazılırsa $-\tan y_0 + 1 = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{\pi}{4}$ olur. $Q(0, \frac{\pi}{4}, 1)$ olur.

Yüzeyin normal vektörü $N = (F_x, F_y, F_z)$ den.

$$N\big|_{Q_0} = \left(-1 + 2xy + z^2\cos x,\ x^2 - 1 - \tan^2 y,\ 2z\sin x\right)\Big|_{Q_0(0, \pi/4, 1)}$$

$N|_{Q_0} = (0, -2, 0)$ olur. $\overrightarrow{Q_0P} = (x-0, y-\frac{\pi}{4}, z-1)$ olur.

Teğet düz. denk $\langle N|_{Q_0}, \overrightarrow{Q_0P} \rangle = 0$ $\quad -2(y - \frac{\pi}{4}) = 0$ $\quad y = \frac{\pi}{4}$ olur.

Kısmi Dif. Denk I. Final . 31.12.2019

1) $x = x^2 y + z^2 \sin x - \tan y + 1$ yüzeyinin üzerindeki $Q_0(0, y_0, 1)$ noktasından geçen teğet düzlemi varsa bulunuz.

2) $pq + xp + yq = 0$, $x^2p^2 - y^2q^2 = 0$ denklemlerinin bağdaşabilir olup-olmadıklarını gösteriniz.

3) $pq + xp + yq = 0$ denkleminin tam çözümünü bulunuz.

4) $y z_x = x z_y + x + y$ denkleminin $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, \sin t - \cos t)$ eğrisinden geçen çözümü varsa bulunuz.

5) $\sqrt{p^2+q} = xp + yq - z$ denkleminin tam çözümünü ve varsa zarf yüzeyini bulunuz.

6) $y = f(x) + g(z)$ ifadesini genel çözüm kabul eden kısmi dif. denk. bulunuz. f ve g keyfi fonksiyonlardır.

Not: Sadece dört soru seçerek cevaplandırınız.

Başarılar... N.A

*) Bölümde şu ana kadar görmüş olduğunuz matematik derslerinizin hayata bakışınızda katkısının olup-olmadığını açıklayınız.

ÇÖZÜMLERİ

1) $Q_0(0, y_0, 1)$ yüzeyin üzerinde old. dan $x=0, y=y_0, z=1$ yazılırsa $-\tan y_0 + 1 = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{\pi}{4}$ olur. $Q(0, \frac{\pi}{4}, 1)$ olur.

Yüzeyin normal vektörü $N = (F_x, F_y, F_z)$ den.

$$N\Big|_{Q_0} = \left(-1 + 2xy + z^2\cos x,\ x^2 - 1 - \tan^2 y,\ 2z\sin x\right)\Big|_{Q_0(0, \pi/4, 1)}$$

$N|_{Q_0} = (0, -2, 0)$ olur. $\overrightarrow{Q_0P} = (x-0, y-\frac{\pi}{4}, z-1)$ olur.

Teğet düz. denk $\langle \vec{N}|_{Q_0}, \overrightarrow{Q_0P} \rangle = 0$ $\quad -2(y - \frac{\pi}{4}) = 0$ $\quad y = \frac{\pi}{4}$ olur.

2) $\varphi: pq + xp + yq = 0$, $\psi: x^2p^2 - y^2q^2 = 0$ olsun.

$$\varphi_p\psi_x + \varphi_q\psi_y + (p\varphi_p + q\varphi_q)\psi_z - (\varphi_x + p\varphi_z)\varphi_p - (\varphi_y + q\varphi_z)\psi_q = 0$$

bağdaşabilme şartı.

$$(q+x)\,2xp^2 + (p+y)(-2yq^2) + \big(p(q+x) + q(p+y)\big)\cdot 0$$

$$-(p + p\cdot 0)\,2x^2p - (q + q\cdot 0)(-2y^2q) \overset{?}{=} 0$$

$$2xqp^2 + \cancel{2x^2p^2} - 2yq^2p - \cancel{2y^2q^2} - \cancel{2x^2p^2} + \cancel{2y^2q^2} \overset{?}{=} 0$$

$2pq(xp - yq) \overset{?}{=} 0$ Ancak $x^2p^2 - y^2q^2 = 0$

$\Rightarrow (xp - yq)(xp + yq) = 0 \Rightarrow$ $xp + yq \neq 0$ dır.

(çünkü $pq + xp + yq = 0$ dan $xp + yq = -pq$ dır)

$xp - yq = 0$ olur. Bunagöre

$2pq(\underbrace{xp - yq}_{=0}) = 0 \Rightarrow 0 = 0$ old. bağdaşabilirdir.

4) $y^2 z_x - xz_y = x + y$ $\quad \dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{-x} = \dfrac{dz}{x+y}$

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \Rightarrow ydy + xdy = 0 \Rightarrow y^2 + x^2 = 2C_1$$

$$\frac{dx - dy}{y + x} = \frac{dz}{x+y} \Rightarrow \int dx - \int dy = \int dz \Rightarrow x - y = z + C_2$$

$u(x,y,z) = y^2 + x^2 = 2C_1$ $\quad V(x,y,z) = x - y - z = C_2$ olur

$\dfrac{\partial(u,V)}{\partial(z,x)} = \begin{vmatrix} 0 & 2x \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2x \neq 0$ dır. $\alpha(t)$ eğrisinde

geçen çözümü bulalım. $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, \sin t - \cos t)$

$y^2 + x^2 = 2C_1 \Rightarrow \sin^2 t + \cos^2 t = 2C_1 \quad 1 = 2C_1$
$x - y - z = C_2 \Rightarrow \cos t - \sin t - \sin t + \cos t = C_2$
$\Bigg\} \Rightarrow$ $1 = 2C_1$
$2\cos t - 2\sin t = C_2$

t yok olmadığı için

çözüm yok.